Usage des technologies et investigation en mathématiques : quels contrats didactiques possibles ?

Ghislaine Gueudet, Marie-Pierre Lebaud

Usage des technologies et investigation en mathématiques : quels contrats didactiques possibles ?

Ghislaine Gueudet & Marie-Pierre Lebaud[1]

Résumé

Mettre en œuvre des démarches d'investigation peut être interprété, avec les outils de la didactique des mathématiques, comme faire vivre en classe un contrat didactique qui laisse aux élèves une responsabilité importante vis-à-vis du savoir en jeu et de l'avancée de ce savoir. Le recours à certains outils logiciels peut-il contribuer à l'établissement d'un tel contrat ? Sous quelles conditions, portant sur les situations mathématiques abordées, sur le rôle du professeur, sur la place des technologies ? Dans cet article, nous discutons ces questions en nous appuyant sur des projets de recherche concernant l'enseignement des mathématiques dans le secondaire. Nous analysons le partage de responsabilités entre le professeur et les élèves selon trois dimensions : la formulation de questions initiales ; la production de réponses ; l'avancée du savoir dans la classe.

Depuis les années 2000, les systèmes éducatifs de nombreux pays recommandent, pour l'enseignement des sciences, d'aller vers la mise en place de démarches d'investigation (DI) dans les classes. En parallèle, se sont développées les technologies numériques qui peuvent apparaître comme une composante utile à cette mise en place. Ainsi, le programme de mathématiques de la classe de Terminale S (en France), publié au Bulletin Officiel en 2011, déclare : « *L'utilisation de logiciels, d'outils de visualisation et de simulation, de calcul (formel ou scientifique) et de programmation change profondément la nature de l'enseignement en favorisant une démarche d'investigation*. » Cependant usage des technologies et mise en œuvre de DI peuvent aussi être vus comme deux difficultés professionnelles pour certains professeurs. Il n'est donc nullement évident que leur combinaison puisse se faire simplement.

L'étude, que nous présentons ici, vise à questionner les apports possibles des technologies pour les DI en mobilisant les outils de la didactique des mathématiques, et en particulier la notion de contrat didactique. Quelles sont les potentialités réelles des logiciels, pour aller vers des DI en classe ? À quelles conditions, ces potentialités peuvent-elles être actualisées ? Nous nous proposons d'amener des éléments de réponse à ces questions, à partir de divers travaux de recherche.

Nous présentons tout d'abord le cadre théorique retenu (§ 1.1) et considérons, à la lumière de ce cadre théorique, les recherches menées sur le thème des DI et des technologies au niveau international (§ 1.2). Nous étudions ensuite différents exemples (§ 2, 3 et 4), certains mettant en évidence les limites de l'utilisation de logiciels ; d'autres montrant plutôt comment les potentialités de ceux-ci peuvent donner lieu à une investigation des élèves. Nous considérons l'ensemble de l'enseignement secondaire, collège et lycée, et des logiciels de différents types. Nous discutons alors les conditions sous lesquelles un logiciel peut favoriser ou non les DI (§ 5).

[1] Ghislaine Gueudet, professeur des universités, Centre de Recherche sur l'Éducation, les Apprentissages et la Didactique (CREAD), ESPE de Bretagne, Université Européenne de Bretagne. Marie-Pierre Lebaud, professeur agrégé, CREAD, Université de Rennes 1.

1. Démarches d'investigation et usages des technologies : cadre théorique, panorama des recherches, et questions

Nous présentons ici les outils d'analyse que nous allons mobiliser, ainsi qu'une brève synthèse des recherches menées sur le thème des apports des technologies pour les DI.

Contrat didactique et investigation en mathématiques

Différentes définitions du contrat didactique ont été données dans le cadre de la théorie des situations. Nous retenons tout d'abord celle introduite dans « le cas de Gaël » : « *Nous appelons "contrat didactique" l'ensemble des comportements (spécifiques) du maître qui sont attendus de l'élève et l'ensemble des comportements de l'élève qui sont attendus du maître* » (Brousseau, 2009, p.35). Cette définition met en avant l'habitude, la répétitivité de certaines conduites. Les travaux relatifs aux démarches d'investigation soulignent que celles-ci demandent une modification du rôle usuel du professeur, et donc l'établissement d'un nouveau contrat. Certains dispositifs organisent ainsi la présence en classe de mathématiciens professionnels ; ce choix peut être interprété comme la constitution d'un milieu « *extraordinaire* » (Matheron & *al.,* 2012), susceptible de permettre l'émergence d'un nouveau contrat – celui-ci étant cependant, nécessairement, limité dans le temps. Le recours aux technologies, modifiant également le milieu, peut donc contribuer à des modifications du contrat didactique. Il est notamment possible, pour certains logiciels, que le professeur se trouve être au même niveau d'expertise que les élèves, par rapport aux possibilités technologiques.

L'objectif de notre étude est d'identifier sous quelles conditions ces modifications peuvent aller dans le sens de l'investigation. Il s'agit alors de caractériser l'investigation en termes de contrat didactique, afin de pouvoir préciser les conditions nécessaires. Dans l'étude qu'il effectue du dispositif de Travaux Personnels Encadrés (TPE), Matheron (2010) souligne le changement de partage de responsabilités entre le maître et l'élève, dans le cadre de ce dispositif, dans deux directions essentielles : en ce qui concerne la formulation de questions, et la production de réponses. De manière similaire, Bueno et *al*. (2009) caractérisent les démarches d'investigation comme « *une forme de contrat didactique qui laisse aux élèves une responsabilité importante, vis-à-vis du savoir en jeu et de l'avancée de ce savoir* ». Retenant ces caractérisations, nous étudions ici différents cas d'enseignements visant la mise en place de DI en classe, et mobilisant des logiciels. Pour chacun de ces cas, nous menons une analyse du contrat didactique, en tentant d'observer en particulier le partage des responsabilités entre le professeur et les élèves :

- dans la formulation des questions initiales. Dans le contexte de la classe, la situation initiale est généralement apportée par le professeur. Mais les élèves peuvent être responsables de la production des questions qui seront étudiées à propos de cette situation ;
- dans le processus de production de réponses. Ce processus peut inclure la production de nouvelles questions, appuyée sur certains résultats obtenus au cours de l'étude. Nous distinguons celles-ci des questions initiales ;
- dans l'avancée du savoir en classe. Il peut s'agir de l'apport de savoirs nouveaux ou de l'approfondissement de savoirs anciens.

Des analyses complémentaires peuvent être menées en recourant au triplet *topogenèse* (production des positions respectives des élèves et du professeur vis-à-vis du savoir), *chronogenèse* (production de mouvements temporels) et *mésogenèse* (production des milieux de l'étude) (Mercier, Schubauer-Leoni & Sensevy, 2002). Nous mentionnons des interprétations utilisant ces concepts ; cependant, nous retenons essentiellement les catégories ci-dessus, qui nous semblent mieux à même d'éclairer les aspects liés aux usages des technologies.

Pour chacune de ces trois dimensions, nous distinguons de plus les responsabilités concernant le contenu mathématique en jeu de celles qui concernent l'emploi du logiciel – tout en considérant que ces deux aspects sont fortement associés. Dans la section suivante, nous examinons ce que les recherches déjà menées sur le potentiel des technologies pour les DI en mathématiques apportent, en ce qui concerne ces trois dimensions.

DI et technologies : apports des recherches

Concernant la production de questions, différents travaux sur les logiciels de géométrie dynamique (Laborde, 2001 ; Leung, 2003) soulignent que la manipulation de figures dynamiques peut amener les élèves à formuler des conjectures. Celles-ci peuvent être appuyées sur l'observation d'invariants ou, à l'opposé, de variations de certaines valeurs (aires, périmètres), dont on cherche des valeurs extrêmes. À chaque conjecture, est naturellement associée une question que l'élève doit ensuite se poser (« ma conjecture est-elle juste ? »). Ces conjectures rentrent dans le champ de ce que nous appelons « questions initiales » : généralement, la figure à étudier a été donnée par le professeur, et il s'agit d'observer si les questions portant sur cette figure sont formulées par le professeur ou par les élèves.

Pour la production de réponses, il apparaît clairement que, dans certains cas, les logiciels disponibles permettent aux élèves de produire des résultats qui seraient simplement inaccessibles sans ces outils. C'est le cas, par exemple, pour le traitement de nombreuses données statistiques (Visnovska, Cobb & Dean, 2012) ; ou, dans le cadre du programme actuel de Terminale S spécialité, pour le calcul des puissances successives d'une matrice (Balliot & Gueudet, 2013). Toutefois, dans le recours à ces outils, il est possible que la mise en œuvre en classe ne laisse que peu d'initiative aux élèves.

Du point de vue de l'avancée du savoir dans la classe, de nombreux travaux soulignent que les logiciels permettent, sous certaines conditions, de soutenir la conceptualisation. C'est le cas pour les logiciels de géométrie dynamique, qui permettent une visualisation amenant les élèves, par exemple, à ressentir les notions de dépendance fonctionnelle (Falcade, Laborde & Mariotti, 2007 ; Hoffkamp, 2010). C'est également le cas pour les tableurs et pour les outils de calcul formel qui peuvent favoriser la conceptualisation de notions algébriques (Drijvers & Gravemeijer, 2004 ; Kieran & Drijvers, 2006). De plus, certains logiciels permettent d'avoir recours à plusieurs registres de représentation, par exemple pour les fonctions ; selon Duval (1995), cette possibilité de changer de registres joue un rôle essentiel pour la conceptualisation. Or, les outils numériques augmentent la diversité des représentations des objets mathématiques (Lagrange & *al.*, 2011) et offrent de plus la possibilité de les manipuler.

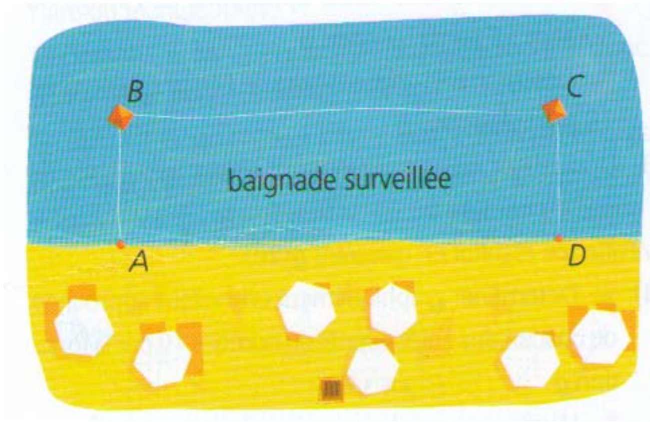
Cependant la mise en œuvre retenue reste essentielle. Les recherches (Haspekian, 2008) ont montré que les tâches proposées sont d'autant plus guidées que l'enseignant est moins à l'aise avec les aspects techniques d'un logiciel et son usage didactique. D'autres travaux confirment ces constats en montrant que les enseignants engagés dans des formations ou des dispositifs expérimentaux concernant l'usage de logiciels pour les DI, évoluent dans leurs choix de mise en œuvre, laissant plus de responsabilités aux élèves (Ruthven, 2012 ; Visnovska & *al.*, 2012).

Ces travaux éclairent certaines possibilités, mais ne permettent pas d'identifier précisément les caractéristiques des mises en œuvre qui amènent les logiciels à favoriser les DI en classe, caractéristiques que nous voulons préciser dans cet article. À cet effet, nous présentons ci-dessous trois cas contrastés, que nous analysons à l'aide du cadre théorique retenu.

2. Optimisation au collège et géométrie dynamique

Nous considérons, dans cette partie, un cas issu d'une recherche portant sur un dispositif de formation continue de professeurs (Gueudet & Trouche, 2011) visant la mise en œuvre en classe de DI en géométrie avec un logiciel de géométrie dynamique. Nous n'entrons pas ici dans cet aspect de formation, mais nous nous appuyons sur le travail de deux stagiaires qui ont conçu et testé en classe de troisième une séance autour de l'optimisation, utilisant le logiciel GeoGebra. Cette séance a été observée et filmée dans l'une des deux classes. Le point de départ de cette séance était un exercice intitulé « la zone de baignade ».

Figure 1- L'énoncé de l'exercice « la zone de baignade »



Un maître nageur utilise une corde et deux bouées (B et C) pour délimiter une zone de baignade rectangulaire. La longueur de la corde est 160 m = 16 dam. Il se demande où placer les bouées B et C pour obtenir la zone la plus étendue possible. Le point A est fixé.

La mise en œuvre retenue, à partir de cet énoncé, est la suivante. Les élèves ont d'abord à faire un travail à la maison : tracer le graphe de la fonction *f* définie par $f(x)=16x-2x^2$, pour x appartenant à l'intervalle [0, 8]. Puis, en classe :

1) à partir de l'énoncé, les élèves représentent sur papier une zone vérifiant les contraintes données. Une mise en commun amène la comparaison des aires des différentes zones, et une première conjecture ;
2) les élèves disposent d'un fichier GeoGebra où le point A et la limite de la plage sont représentés. Ils doivent créer un rectangle répondant aux contraintes, faire afficher son aire et observer les variations de celle-ci lorsqu'ils déplacent le point B. Les étapes de la construction sont données sur une fiche, par exemple : « Créer le cercle de centre B et de rayon 16-2d, expliquer le lien avec la position du point C » ;
3) les élèves disposent d'un fichier GeoGebra où figurent simultanément la représentation géométrique et la trace d'un point mobile M de coordonnées (AB, aire[ABCD]). Les élèves font varier le rectangle, observent la courbe formée par le déplacement du point M (figure 2). Ils doivent faire le lien avec le travail à la maison préliminaire ;
4) les élèves font figurer dans un tableur les valeurs prises par la fonction *f* ;
5) un travail sur la preuve est proposé sous forme d'un exercice à trous.

Figure 2 - Fichier GeoGebra donné aux élèves,
superposant la représentation géométrique et la trace du point M

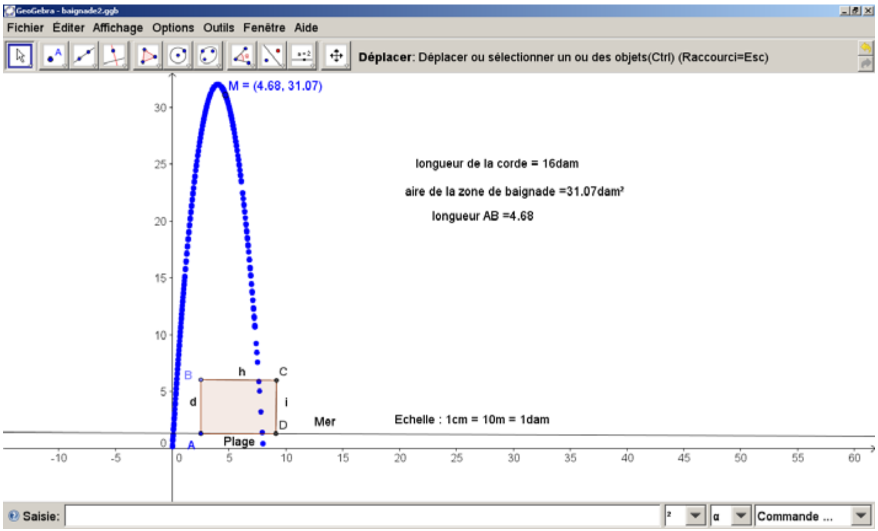


Tableau 1 - Partage des responsabilités élèves/professeur, situation « zone de baignade »

	Aspects mathématiques	*Aspects technologiques*
Formulation des questions initiales	Énoncé proposé par le professeur Travail conjoint professeur-élève pour l'interprétation en terme d'aire Travail conjoint professeur-élèves pour l'établissement de la conjecture	Pas d'intervention du logiciel dans la formulation de la question ou de la conjecture initiale
Production de réponses *(parties 2 et 3)*	Confirmation de la conjecture, en parties 2 et 3, par les élèves à partir de leurs observations sur le logiciel Partie 2 : Étapes données par le professeur Partie 3 : Discussion en classe entière ; beaucoup d'apports du professeur, dus aux difficultés d'interprétation des élèves	Pas d'intervention du logiciel dans la formulation de la question ou de la conjecture initiale
Avancement du savoir	Des savoirs nouveaux, plutôt apportés par le professeur : modélisation par une fonction, construction point par point de son graphe. Le logiciel est utilisé pour le graphe.	Partie 2 : Certains élèves trouvent par eux-mêmes comment afficher la valeur numérique de l'aire, et observent les variations de celle-ci. Partie 3 : Les élèves identifient le point M comme ayant pour coordonnées AB, et l'aire du rectangle. Le lien entre graphe de la fonction et trace du point M est fait par le professeur.

Ce tableau laisse clairement apparaître que l'investigation par les élèves reste limitée. Le logiciel permet de confirmer la conjecture issue de la confrontation de différentes représentations sur papier, l'avantage étant que chaque élève accède par GeoGebra à de multiples valeurs. Les contenus mathématiques en jeu semblent trop nouveaux pour que les élèves puissent être autonomes dans le processus de résolution. En ce qui concerne GeoGebra, les élèves savent mobiliser les fonctionnalités du logiciel pour effectuer la construction guidée. En revanche, le fichier (figure 2) où figurent le rectangle et la trace du point M pose problème. Ici, le logiciel n'est pas un outil pour l'investigation ; la responsabilité des élèves se limite à effectuer un déplacement et en observer les conséquences. L'un des aspects du travail des élèves est d'interpréter la figure dynamique : en particulier, comprendre comment a été construit le point M et à quoi correspond la trace de ce point. La mésogenèse reste fortement pilotée par le professeur, qui n'introduit pas de productions d'élèves dans le milieu. Les élèves contribuent à la chronogenèse par la formulation d'une conjecture ; mais l'avancée du savoir est principalement portée par le professeur, dont la position topogénétique reste donc largement dominante.

3. La nacelle

Cette activité a été créée par le groupe de recherche IREM de Rennes-IFÉ (Halbert & *al.*, 2013) travaillant au développement du logiciel Casyopée[2], environnement d'apprentissage dédié aux fonctions. Le texte suivant est proposé à des élèves de terminale scientifique.

Figure 3 - L'énoncé de l'activité « la nacelle »

On considère une roue circulaire, de 1 m de rayon, mobile autour de son axe horizontal. Une corde de 12 m de long est enroulée autour de la roue de telle façon que, si l'on tire sur la corde par son extrémité libre A, la roue se met à tourner.
Le point E est la position la plus éloignée du point A par rapport au point j. Une autre corde de 2 m de long est fixée en un point M de la circonférence, elle passe par un guide fixé en P, proche de la roue, à 1 m de l'axe et sur la verticale (jO). La nacelle est accrochée à l'extrémité N de cette corde de 2 m. Lors du lancement, le point A est en j et le point M est en i. On s'intéresse au mouvement du point N.

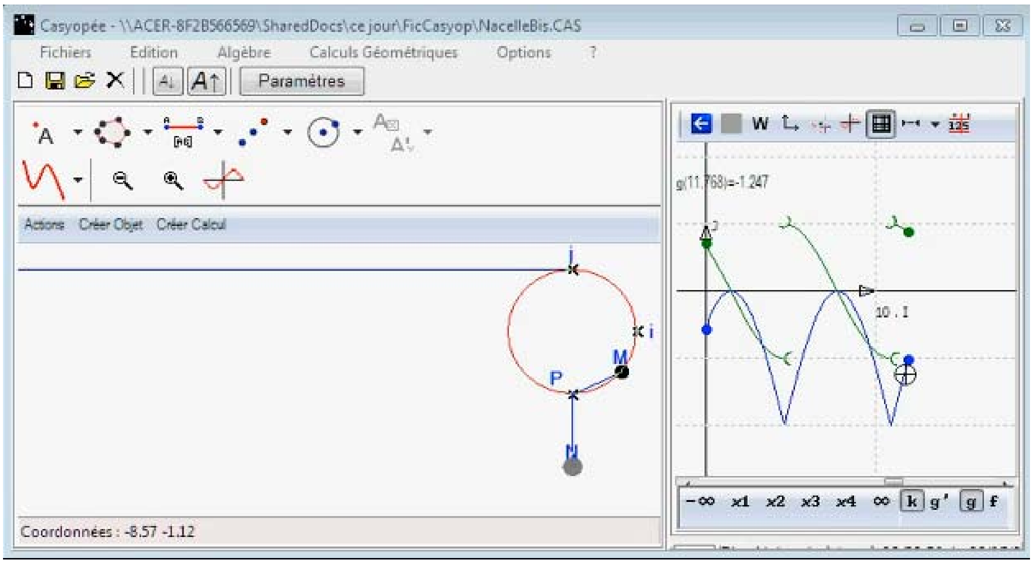
Pour assurer la dévolution de ce problème, les élèves commencent par manipuler une maquette en vraie grandeur de ce dispositif et il leur est demandé de « *décrire les sensations qui pourraient être ressenties au moment où la nacelle passe au point haut de son déplacement et au point bas* ». Il est attendu qu'ils identifient une différence et qu'ils l'associent à une propriété de dérivabilité de la fonction. Si cette notion n'est pas nouvelle pour les élèves, ils ont rarement travaillé sur des fonctions non dérivables en certains points, comme c'est le cas dans cette situation. Puis, le travail se déroule en trois parties.

- Les élèves doivent compléter une modélisation au moyen d'un logiciel de géométrie dynamique. Ils peuvent alors poursuivre leur exploration avec cet artefact, un point libre sur un segment pilotant la rotation de la roue.
- En utilisant les fonctionnalités spécifiques du logiciel utilisé, ils doivent obtenir une fonction modélisant la dépendance entre la position de la nacelle et la longueur de la corde tirée.
- Les élèves peuvent ensuite travailler sur cette fonction et sa dérivée à la fois dans le registre des formules et dans celui des représentations graphiques, Casyopée permettant de visualiser simultanément le graphe de la fonction et le mouvement de la nacelle modélisée (figure 4).

[2] http://www.casyopee.eu

La modélisation se fait donc en deux temps : d'abord par une figure géométrique dynamique, puis par une représentation algébrique définie à partir de cette figure. Plusieurs modélisations sont possibles, selon le choix de la variable, pour représenter le mouvement par une fonction et ce choix est entièrement laissé à l'élève. Le passage au cadre algébrique est facilité par le logiciel qui prend en charge le calcul de la fonction demandée et de sa dérivée. Toutes les fonctions obtenues feront bien sûr apparaître les mêmes singularités.

Figure 4 - L'écran de Casyopée utilisé par le professeur pour la synthèse



Lors de la manipulation de la roue, les élèves identifient bien l'annulation de la vitesse de la nacelle lorsqu'elle passe aux points haut et bas, et parlent d'un passage plus brutal en bas qu'en haut. Dans la troisième partie de l'activité, ils ne remarquent pas les « segments verticaux » apparaissant sur la courbe de la dérivée (le logiciel relie en effet par un « segment vertical » les valeurs des dérivées obtenues à droite et à gauche des points de singularité). Le rôle du professeur est de les questionner sur ces singularités et, à partir de leurs interprétations, de les aider à la compréhension mathématique.

Lors de la synthèse, le professeur revient sur l'interprétation des segments verticaux, affiche la courbe de la fonction dérivée en excluant les points où elle n'est pas définie et peut ainsi évoquer la notion de dérivée à droite et à gauche, à partir d'une lecture graphique. Le professeur utilise également l'expression algébrique de la fonction déterminée par le logiciel pour faire le lien avec le domaine de dérivabilité de la fonction racine carrée étudiée en cours.

Tableau 2 - Partage des responsabilités élèves/professeur, situation « la nacelle »

	Aspects mathématiques	*Aspects technologiques*
Formulation des questions initiales	Manipulation de la nacelle par les élèves pour l'établissement de la conjecture. Les élèves identifient l'annulation de la vitesse au passage des points haut et bas.	Pas d'intervention du logiciel dans la formulation de la conjecture initiale.
Production de réponses	Les élèves ont en charge la modélisation mathématique : définir la position de la nacelle comme fonction d'une certaine longueur. L'interprétation des différences entre les points haut et bas se fait par lecture du graphique de la dérivée de cette fonction.	Les élèves ont la responsabilité d'utiliser les outils fournis par Casyopée pour expérimenter et modéliser. Le logiciel prend en charge le calcul algébrique de la dérivée et sa représentation graphique.
Avancement du savoir	L'enseignant intervient pour demander d'expliciter les points de rupture et de trouver leurs abscisses. Le savoir nouveau est formalisé par le professeur (dérivées à droite et à gauche).	Les différences entre les points haut et bas de la nacelle se lisent sur le graphique de la dérivée donné par le logiciel. Le logiciel a permis aux élèves de voir les « ruptures » dans la dérivée de la fonction.

Le tableau fait apparaître que l'enseignant intervient peu dans le cheminement du travail de l'élève. Son rôle est celui d'un médiateur : il fait remarquer la singularité de la fonction, puis il formalise le nouveau savoir et fait le lien avec les connaissances antérieures des élèves. Ceux-ci modélisent le problème sans être guidés.

L'environnement de Casyopée prend en charge les activités de traitement à l'intérieur de chaque registre utilisé : écriture de la fonction, calcul de sa dérivée, représentation graphique. Par contre, il laisse les activités de changements de registres à la charge de l'élève comme la modélisation par une fonction. Ainsi le lien entre la situation de départ et la fonction étudiée fait sens pour l'élève. Il s'agit ici spécifiquement d'un logiciel dédié à l'apprentissage des fonctions qui libère les élèves d'une partie calculatoire, assez lourde, pouvant cacher la notion que l'enseignant souhaite faire découvrir. Ce traitement par Casyopée enrichit le milieu ; cet aspect particulier de la mésogenèse permet une topogenèse dans laquelle la responsabilité des élèves inclut la modélisation de la situation. La synthèse reste à la charge du professeur, mais le fichier qu'il projette prend sens pour les élèves de par la présence dans le milieu des fichiers qu'ils ont eux-mêmes produits.

4. L'Alignement du XXI^e^ siècle

Nous présentons ici une activité conçue par un groupe de l'IREM de Rennes (Grodowski & *al.*, 2012) pour des classes de troisième. Le point de départ est une sculpture conçue par Aurélie Nemours et intitulée *L'Alignement du XXI^e^ siècle*[3]. Il s'agit de soixante-douze colonnes (des parallélépipèdes rectangles) hautes de 4,5 m et disposées selon une grille régulière 8x9. L'œuvre est orientée pour que les colonnes et leur ombre soient alignées à midi solaire. La vue

[3] http://www.nxtbook.fr/newpress/Ville-Rennes/le-Rennais-060515_374/index.php#/18

du haut constitue alors un dessin de lignes sombres entrecoupées de carrés blancs. L'artiste voulait mettre en espace un de ses tableaux.

Figure 5 - Vue de face et vue de dessus (Google Earth) de l'Alignement du XXI^e siècle

L'activité commence par une recherche Internet à faire à la maison : « qu'est-ce que *l'Alignement du XXIe siècle* ? » Une mise en commun des réponses est faite au cours suivant, puis le professeur demande : « avez-vous des questions concernant cette œuvre ? » L'enseignant, en accord avec les élèves, garde celles pouvant avoir un lien avec les mathématiques. Par exemple : « Pourquoi soixante-douze colonnes ? Pourquoi ce choix d'intervalles entre les colonnes ? Les ombres à midi se rejoignent-elles d'une colonne à l'autre ? » sont retenues comme questions mathématiques. Elles sont ensuite étudiées par groupe en classe, les élèves ayant à leur disposition des ordinateurs. Nous décrivons, dans la suite, les questions pour lesquelles les élèves ont eu recours à des logiciels (voir Le Beller & Lebaud, à paraître, pour le déroulement complet de l'activité).

Le travail démarre par une vue de dessus de l'œuvre pour visualiser le tableau obtenu. Une modélisation est faite au moyen d'un logiciel de géométrie dynamique plane. Très vite, les élèves réinvestissent des connaissances mathématiques pour tracer les soixante-douze carrés (les colonnes vues du haut) en évitant un travail répétitif. Mais la représentation des ombres pose problème. Pour les déterminer et voir si les dimensions choisies par l'artiste permettent effectivement à l'ombre d'une colonne d'atteindre la suivante, les élèves se lancent dans une vue de face et représentent les rayons du soleil par des droites concourantes (en « *repoussant le point de concours à l'infini* ») ou des droites parallèles. D'autres élèves changent de logiciel : SketchUp permet des construire des objets en volume et de représenter les ombres portées pour une position terrestre et une heure données.

Dans les deux cas, les élèves doivent connaître la hauteur maximale du soleil et donc géolocaliser *l'Alignement*. Des éléments de réponse sont trouvés sur Internet. Nouvelle question : « À quoi correspondent les degrés, minutes et secondes dans la mesure de latitude et longitude ? » Les élèves pensent que l'ombre minimale correspond à l'heure de midi. Une correction est rapidement apportée pour tenir compte de l'heure d'hiver, mais cela ne convient pas. Les élèves s'interrogent alors et l'enseignant introduit la notion de midi solaire. Nouveau problème : « comment déterminer le midi solaire en un lieu donné ? »

Des mises en commun sont régulièrement organisées par le professeur afin que chacun bénéficie de l'apport des recherches des autres. La preuve mathématique que les dimensions de la sculpture permettent bien de recréer le tableau vu du haut est faite par l'enseignant à partir des productions des élèves. De nombreuses connaissances mathématiques sont ainsi réinvesties : notion d'échelle pour la modélisation, proportionnalité pour l'interprétation de la longitude, constructions géométriques et transformations planes pour la vue de dessus, trigonométrie… La notion de fonction, ou au moins de dépendance fonctionnelle, va être introduite par le professeur afin de calculer la hauteur minimale d'une colonne, pour avoir une ombre portée qui rejoigne la suivante, en fonction de la hauteur du soleil.

Le tableau suivant se réfère à la question *« Les ombres à midi se rejoignent-elles d'une colonne à l'autre ? »*

Tableau 3 - Partage des responsabilités élèves/professeur, situation « l'Alignement »

	Aspects mathématiques	*Aspects technologiques*
Formulation des questions initiales	Les questions sont retenues conjointement à partir de celles que les élèves se posent.	Les questions sont issues des recherches faites par les élèves sur Internet à partir de la question posée par l'enseignant.
Production de réponses	Le professeur ne guide pas les élèves dans leur cheminement. Suivant les groupes, celui-ci n'est pas le même et les notions mathématiques utiles différentes.	Les élèves ont le choix du logiciel et de leur représentation. Des élèves ont employé un logiciel non utilisé auparavant et non dédié à l'enseignement.
Avancement du savoir	Les savoirs réinvestis sont à la charge des élèves. L'enseignant est une personne ressource qui permet d'éviter un blocage éventuel. Un savoir nouveau est utilisé par le professeur pour représenter un problème rencontré par les élèves : hauteur minimale de la colonne en fonction de la hauteur du soleil.	Le fonctionnement du logiciel GeoGebra est pris en charge par les élèves. Ils découvrent les fonctionnalités de SketchUp par eux-mêmes.

Dans cette activité, les logiciels ont clairement aidé à la mise en place d'une investigation par les élèves ; ils obligent à s'interroger sur les données nécessaires pour modéliser la situation. L'intervention de l'enseignant s'est limitée à une aide technique et à l'apport d'indices, par exemple pour la notion de midi solaire. Il assure également les mises en commun des différentes recherches. Mais les questions étudiées sont introduites par les élèves. Il est à noter que ceux-ci ne sont pas incités à utiliser de logiciel ; ils ont seulement accès à des ordinateurs. Ainsi du point de vue de la mésogenèse, certains logiciels ont été introduits dans le milieu par les élèves ; de plus leurs productions sur ces logiciels ont été projetées et discutées avec l'ensemble de la classe. Lors de ces mises en commun, les élèves avaient la responsabilité de présentation et de justification mathématique de leurs propositions ; cependant le professeur orientait les échanges, de manière en particulier à obtenir la production de nouvelles questions. Ainsi la responsabilité de production de ces questions, contribuant à l'avancée du temps didactique, était partagée entre les élèves et le professeur.

5. Discussion

L'étude de ces différents cas confirme que l'usage de technologies ne garantit nullement le développement de DI en classe. L'analyse en termes de partage des responsabilités dans le premier cas présenté illustre ce constat : les contraintes de temps ont joué de manière importante, ainsi que le manque de familiarité des élèves avec le logiciel. Ces deux facteurs ont contribué à une mise en œuvre très guidée, avec une position topogénétique dominante du professeur. Cependant des possibles apparaissent, dans des conditions que nous tentons de préciser ci-dessous.

Formulation des questions initiales

Dans la classification que nous avons retenue ici, de telles questions englobent des questions et conjectures produites à partir d'une situation ou d'une figure apportée par le professeur. Le fait qu'un logiciel permette aux élèves de formuler des conjectures est attesté par de nombreux travaux. Les exemples considérés, ici, amènent plutôt à souligner qu'il peut exister d'autres moyens que le logiciel, pour cette formulation ! Pour la « zone de baignade », les conjectures sont formulées à partir de figures papier tracées par les élèves ; pour « la nacelle », c'est le dispositif matériel qui intervient à cette étape. Dans le cas de « *l'Alignement* », il ne s'agit pas de formulation de conjectures, mais de questions étudiées qui sont issues de recherches menées par les élèves avec Internet. Nous avons montré dans une synthèse de la littérature concernant la formation des enseignants aux DI (Lebaud & Gueudet, 2012) que les travaux sur ce sujet retiennent deux dimensions des DI : d'une part, questionner le réel et faire le lien entre le réel et les concepts scientifiques, d'autre part, « mener une enquête ». Nous considérons ici que, dans le cas de *l'Alignement*, les élèves mènent, au départ du travail, une enquête grâce à une recherche sur Internet. Ce constat invite à approfondir l'étude des potentialités de l'Internet comme outil d'enquête (Ladage & Chevallard, 2011), dans le cas des mathématiques.

Processus de production de réponses

Dans les trois exemples, une partie du processus de production de réponses s'appuie sur une modélisation de la situation au moyen d'un logiciel. C'est à ce niveau, en particulier, qu'un logiciel intervient pour soutenir l'investigation de l'élève. Dans la « zone de baignade », cette modélisation est donnée aux élèves sous forme d'un fichier GeoGebra. Dans les deux autres cas, elle est construite par les élèves. Pour « la nacelle », le logiciel est essentiel, puisque c'est grâce à ses fonctionnalités que l'élève pourra effectuer la modélisation. Toutefois la responsabilité dévolue aux élèves apparaît plus importante dans le cas de « l'*Alignement* ». En effet, les élèves sont laissés libres de retenir le logiciel qu'ils vont utiliser pour leur étude. Certains choisissent SketchUp, un logiciel qui n'avait jamais été utilisé dans cette classe en mathématiques. Ici, le logiciel se constitue réellement en outil pour une investigation menée par l'élève, et la mobilisation de cet outil relève de l'initiative de l'élève. Ceci nécessite, naturellement, une maîtrise par l'élève des fonctionnalités du logiciel, mais également une grande confiance de la part de l'enseignant dans ses capacités à improviser, pour suivre et utiliser les productions des élèves avec un logiciel qui, éventuellement, ne lui est pas familier.

Avancée du savoir en classe

Pour le cas de « la zone de baignade », nous notons une responsabilité importante laissée aux élèves aussi bien en ce qui concerne l'interprétation des affichages du logiciel que la découverte de certaines de ses fonctionnalités. Le logiciel se constitue en objet d'apprentissage, plutôt qu'en outil pour l'élève. L'avancée du savoir mathématique reste principalement à la charge de l'enseignant, en raison des difficultés rencontrées pour l'interprétation de l'affichage du logiciel.
Nous retenons que, dans le cas de « *l'Alignement* », peu de savoirs mathématiques nouveaux ont été introduits. Les initiatives prises par les élèves étaient permises en particulier par leurs connaissances mathématiques. C'est aussi le cas de « la nacelle ». En termes d'avancée du savoir mathématique, il s'agit d'approfondissement de savoirs déjà rencontrés, et non de la découverte de savoirs nouveaux. Ainsi, il semble qu'une condition favorisant l'investigation soit de faire appel plutôt à de tels savoirs, qui peuvent alors se constituer en outils pour l'investigation, notamment avec des logiciels, et dans le même temps être approfondis.

Conclusion

Nous avons proposé dans cet article une étude des DI en mathématiques avec des logiciels centrée sur le contrat didactique, analysé selon trois dimensions : questions initiales, production de réponses et avancée du savoir. Nous retenons en premier lieu que cet outil d'analyse est pertinent pour éclairer l'investigation menée, ou non, par les élèves. Il peut être complété par des analyses en termes de méso-, chrono-, topogenèse, qui fournissent des pistes intéressantes d'approfondissement théorique pour l'étude des DI. Du point de vue du triplet méso, chrono, topogenèse, on peut ainsi considérer que les DI sont caractérisées par une mésogenèse dans laquelle les productions des élèves jouent un rôle essentiel d'enrichissement du milieu et contribuent à la chronogenèse, ménageant en conséquence une place importante aux élèves dans la topogenèse. En retenant cette perspective, les logiciels peuvent soutenir les DI en particulier s'ils contribuent à une telle mésogenèse ; dans le cas de la nacelle, ou de l'alignement, nous avons observé en effet que les fichiers produits par les élèves leur permettaient d'exercer une responsabilité significative dans la production de réponses et la formulation de nouvelles questions.

Nous notons l'importance de l'aspect « mener une enquête » des DI, et les potentialités des logiciels pour cet aspect. Nous avons souligné ci-dessus l'apport possible d'Internet. Nous retenons aussi le débat entre pairs comme faisant partie de cette enquête. Or les logiciels peuvent être propices au débat, d'une part parce qu'ils induisent souvent un travail en binôme faute d'un nombre suffisant d'ordinateurs, d'autre part parce que des productions de type numérique, si elles sont montrées par le professeur, sont plus anonymes que des copies où l'écriture peut être reconnue. Cette dépersonnalisation peut favoriser la contribution de certains élèves.

Les éléments concernant la modélisation mathématique sont également importants. Les logiciels semblent permettre une responsabilité importante des élèves pour cette modélisation, à certaines conditions. Il s'agit, d'une part, que les savoirs mathématiques nécessaires ne soient pas nouveaux, mais puissent se constituer en outils pour les élèves. Ceci ne semble pas nécessaire pour les aspects technologiques, les élèves peuvent découvrir les fonctionnalités d'un logiciel au cours de l'investigation. Mais il est important que l'enseignant se sente suffisamment en confiance avec l'outil technologique pour abandonner cette responsabilité aux élèves. Le recours à l'outil informatique est devenu de plus en plus naturel pour les élèves et va maintenant très rapidement l'être pour les générations d'enseignants à venir, il sera intéressant d'étudier si cette évolution favorisera des mises en œuvre davantage portées vers l'étude de productions des élèves.

En termes d'avancée du savoir, nous notons, dans les trois exemples cités, que peu de connaissances nouvelles sont finalement introduites et qu'elles le sont toujours par les enseignants. Cependant, la dévolution d'une problématique, au moins dans le cadre de la nacelle et de l'alignement, est forte et le réinvestissement de notions connues (ou au moins déjà vues en cours) se fait naturellement donnant ainsi un sens à certains concepts. Il y a donc très certainement un effet sur les apprentissages ; les données dont nous disposons ne nous permettent toutefois pas de mesurer cet effet, et encore moins d'identifier au sein de cet effet l'impact du recours à des logiciels.

Une autre limitation de notre étude concerne l'absence, dans les travaux que nous avons mentionnés, de réelle prise en compte de l'évaluation, élément essentiel influençant le contrat didactique. Malgré les injonctions institutionnelles à développer l'usage des technologies et la mise en place de DI dans la classe de mathématiques, ces deux aspects ne sont pas, ou peu, évalués lors des examens. Le brevet des collèges propose certes un exercice concernant une tâche complexe ; cependant le lien avec les DI n'est pas évident, et les technologies n'interviennent pas. En ce qui concerne le baccalauréat, le cas de l'enseignement de matrices en spécialité mathématiques Terminale S fournit un exemple frappant de décalage entre une ambition affichée d'investigation et une évaluation portant sur des techniques (multiplication de matrices 2x2 dans l'épreuve proposée en Métropole en juin 2013). Il est probable que, sans évolution significative de ces évaluations, les pratiques de classes elles aussi changeront peu.

Bibliographie

B.O. (2011), *Bulletin Officiel spécial n°8 du 13 octobre 2011*, Programme de l'enseignement spécifique et de spécialité de mathématiques.

BALLIOT A. & GUEUDET G. (2013), « Matrices au lycée : de nouvelles possibilités, pour la transition secondaire-supérieur ? », *La réforme des programmes du lycée, et alors ?,* F. Vandebrouck (dir.), Paris, Irem de Paris, p.188-197.

BROUSSEAU G. (2009), « *Le cas de Gaël revisité (1999-2009) »,* http://hal.archives-ouvertes.fr/hal-00582620, consulté le 13 septembre 2013.

BUENO-RAVEL L., FERRIÈRE H., FOREST D., GUEUDET G., LAUBE S., KUSTER Y., SENSEVY G. (2009), Technologies, resources, and inquiry-based science teaching. A literature review. Deliverable 5.1, Mind the Gap FP7 project 217725, 32 p.
http://uv-net.uio.no/mind-the-gap/Finished%20Deliverables/5.1_Review%20of%20litterature.pdf, consulté le 13 septembre 2013.

DRIJVERS P. & GRAVEMEIJER K.P.E. (2004), « Computer algebra as an instrument: examples of algebraic schemes », *The didactical challenge of symbolic calculator: Turning a computational device into a mathematical instrumen*t, D. Guin, K. Ruthven & L. Trouche L. (dir.), Dordrecht, Kluwe, p.163-196.

DUVAL R. (1995), *Sémiosis et pensée humaine. Registres sémiotiques et apprentissages intellectuels*, Berne, Peter Lang.

FALCADE R., LABORDE C. & MARIOTTI M.A. (2007), « Approaching functions: Cabri tools as instruments of semiotic mediation », *Educational Studies in Mathematics*, n°66(3), p.317-333.

GRODOWSKI S., GUEUDET G., LE BELLER C., LEBAUD M-P., PEPINO C., ROUAULT Y. (2012), « Démarches d'investigation en mathématiques au collège », *Représentations dynamiques des mathématiques : quels outils pour faire, pour apprendre et pour enseigner les mathématiques ? Actes des journées Ifé 2012,* G. Aldon *& al*. (dir.),http://ife.ens-lyon.fr/editions/editions-electroniques/representation-dynamiques-des-mathematiques, consulté le 13 septembre 2013.

GUEUDET G. & TROUCHE L. (2011), « Mathematics teacher education advanced methods: an example in dynamic geometry », *ZDM, the international journal on mathematics education*, n°43(3), p.399-411.

HALBERT R., LAGRANGE J.-B., LE BIHAN C., LE FEUVRE B., MANENS M.-C., MEYRIER X. (2013), *Les fonctions : comprendre et résoudre des problèmes de la 3ème à la Terminale. L'apport d'un logiciel dédié,* Rennes, IREM de Rennes.

HASPEKIAN M. (2008), « Une genèse des pratiques enseignantes en environnement instrumenté », *La classe de mathématiques : activités des élèves et pratiques des enseignants*, F. Vandebrouck (dir.), Toulouse, Octarès.

HOFFKAMP A. (2010), « Enhancing the functional thinking using the computer for representational transfer », *Proceedings of the Sixth European Conference on Research on Mathematics Education,* V. Durand-Guerrier, S. Soury-Lavergne & F. Arzarello (dir.), p.1201-1210, Lyon, INRP, www.inrp.fr/editions/cerme6, consulté le 13 septembre 2013.

KIERAN C. & DRIJVERS P. (2006), « The co-emergence of machine techniques, paper-and-pencil techniques, and theorical reflection: A study of CAS use in a secondary school algebra », *International Journal of Computers for mathematics Learning*, n°11, p.205-263.

LABORDE C. (2001), « The use of new technologies as a vehicle for restructuring teachers' mathematics », *Making sense of mathematics teacher education,* T. Conney & F.L. Lin (dir.), Dordrecht, Kluwer Academic Publishers, p.87-109.

LADAGE C. & CHEVALLARD Y. (2011), « Enquêter avec l'Internet : études pour une didactique de l'enquête », *Éducation & Didactique*, n°5(2), p.85-115.

LAGRANGE J.-B., ARTIGUE M., CAZES C., GELIS J.-M. & VANDEBROUCK F. (2011), « Représenter des Mathématiques avec l'ordinateur », *Actes du séminaire national de didactique des mathématiques* 2010, M. Abboud-Blanchard & A. Fluckiger (dir.), Paris, IREM de Paris 7, p.67-100.

LE BELLER C. & LEBAUD M.-P. (à paraître), « Mettre en œuvre l'investigation en classe à partir d'une "vraie question" : l'exemple de l'alignement du XXIe siècle », *Repères IREM*, n°96.

LEBAUD M.-P. & GUEUDET G. (2012), « Démarches d'investigation et collectifs dans la formation des enseignants », *Enseignement des mathématiques et contrat social : enjeux et défis pour le 21e siècle - Actes du colloque EMF 2012*, J.-L. Dorier & S. Coutat (dir.), p.1400-1412, http://www.emf2012.unige.ch/index.php/actes-emf-2012, consulté le 13 septembre 2013.

LEUNG A. (2003), « Dynamic geometry and the theory of variation », *Proceedings of the 27th PME International Conference*, N.A. Pateman, B.J. Dougherty & J.T. Zilliox (éd.), 3, p.197-204.

MATHERON Y. (2010), « Démarche d'investigation » et Parcours d'Étude et de Recherche en mathématiques : entre injonctions institutionnelles et étude raisonnée des conditions et contraintes de viabilité au sein du système », Conférence au colloque CORFEM, Caen, consulté le 13 septembre 2013.

MATHERON Y., MORSELLI F., RENÉ de COTRET S., SCHNEIDER M. (2012), « La démarche d'investigation dans la classe de mathématiques, fondements et méthodes. Compte rendu du Groupe de Travail n°10 », *Enseignement des mathématiques et contrat social : enjeux et défis pour le 21e siècle*. Actes du colloque EMF 2012, J.-L. Dorier & S. Coutat (dir.), p.1259-1281. http://www.emf2012.unige.ch/index.php/actes-emf-2012, consulté le 13 septembre 2013.

MERCIER A., SCHUBAUER-LEONI M. & SENSEVY G. (2002), « Vers une didactique comparée », *Revue Française de Pédagogie,* n°141, p.5-16.

RUTHVEN K. (2012), « Constituting Digital Tools and Materials as Classroom Resources: The Example of Dynamic Geometry », *From text to 'lived resources': curriculum material and mathematics teacher development,* G. Gueudet, B. Pepin & L. Trouche (éd.), New York, Springer, p.83-103.

VISNOVSKA J., COBB P. & DEAN C. (2012), « Mathematics teachers as instructional designers: What does it take? » *From text to 'lived resources': curriculum material and mathematics teacher development,* G. Gueudet, B. Pepin & L. Trouche (éd.), New York, Springer, p.323-341.